

Infos > Exercices : CO 15 très pleine
CO 10, CO 11 & CO 124 ont plein de
place!

Rappel

Définition 0.31

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction.

(i) f est injective si $\forall x, y \in X$
 $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

(ii) f est surjective si $\forall y \in Y$
 $\exists x \in X$ tq $f(x) = y$

(iii) f est bijjective si f est
injective & surjective.

Remarque 0.32:

On a qu'une fonction est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = Y$

Exemples 0.33

(i) Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$. Alors, f est bijective.

Montrons que f est injective, par contraposée.

$A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg B \Rightarrow \neg A$
où $\neg$ est la négation logique.

$\neg A$ vrai $\Leftrightarrow A$ faux

$\neg A$ faux $\Leftrightarrow A$ vrai.

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$\text{i.e. } \forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ quelconques.

$$\text{Si } f(x) = f(y), \text{ on a } x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Rightarrow |x| = |y|$$

Or, on a que $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a $x, y \geq 0$. Ainsi,

$$x = |x| = |y| = y$$

Vu que x et y sont quelconques, on a le résultat.

→ Partie scriptée

→ hypothèse

→ deductions

→ conclusion

→ Justifications

Montrons que f est surjective, i.e.

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } f(x) = y.$$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$ quelconque.

Posons $x = \sqrt{y}$. Alors,

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y.$$

y étant quelconque, on a le résultat.

(ii) Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

le codomaine a changé!

Montrons que f est injective, mais pas surjective.

Par l'injectivité, la démonstration est la même qu'au point (i).

Comment montrer que quelque chose est faux ?

On montre que sa négation logique est vraie.

Dans des propriétés simples, négation du langage et négation logique coïncident: " $\neg(x \neq y)$ " = " $x = y$ ".

Dans le cas d'énoncés plus complexes, avec des connecteurs logiques (et/ou) ou des quantificateurs ($\forall, \exists$), la négation du langage & la négation logique sont différents.

Par exemple "Toutes les personnes regardant cette vidéo ont une bouteille d'eau sur la tête."

négation du langage :

"Toutes les personnes regardant cette vidéo n'ont pas une bouteille d'eau sur la tête."

La négation logique se construit avec des "règles de calcul"

(Voir Annexe A, remarque A.6 du polycopié & série 2)

$$\neg (A \text{ ou } B) = \neg A \text{ et } \neg B \quad (1)$$

$$\neg (A \text{ et } B) = \neg A \text{ ou } \neg B \quad (2)$$

$$\neg (A \Rightarrow B) = A \text{ et } \neg B \quad (3)$$

$$\neg (\forall x \in X, \dots) = \exists x \in X \text{ tq } \neg (\dots) \quad (4)$$

$$\neg (\exists x \in X, \text{ tq } \dots) = \forall x \in X, \neg (\dots) \quad (5)$$

$$\text{Ici } \neg (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } f(x) = y)$$

$$\stackrel{(4)}{=} \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \neg (\exists x \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } f(x) = y)$$

$$\stackrel{(5)}{=} \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}_+ \neg (f(x) = y)$$

$$= \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \neq y.$$

Preuve:

Posons $y = -1$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$ quelconque.

$$\text{Alors, } f(x) = x^2 \geq 0 > -1 = y.$$

$$\Rightarrow f(x) \neq y.$$

x étant quelconque, on a le résultat.

(iii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = x^2. \quad \uparrow \text{ le domaine a changé}$$

Montrons que f est surjectif
mais pas injectif

La démonstration que f est
surjective est la même qu'au
point (i)

$\neg$ (f injective) :

$$\neg (\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

$$\stackrel{(4)}{=} \exists x, y \in \mathbb{R} \text{ tq } \neg (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

$$\stackrel{(3)}{=} \exists x, y \in \mathbb{R} \text{ tq } x \neq y \text{ et } f(x) = f(y).$$

$\exists x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

Posons $x = 1$, $y = -1$. Alors, $x \neq y$
et $f(x) = x^2 = 1^2 = 1$ tandis que
 $f(y) = y^2 = (-1)^2 = 1$, d'où $f(x) =$
 $f(y)$, qui est le résultat voulu.

(iv) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
 $f(x) = x^2$. Alors, f n'est ni surjective
ni injective
 $\hookrightarrow$ idem (ii) idem (iii)

Morale de l'histoire: dire que x^2
est injective / surjective n'a pas
de sens, ça dépend du domaine
et codomaine.

Définition 0.34 : Composition de fonctions.

Soient $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, deux fonctions. La composition de f et g notée $g \circ f$ est la fonction

$g \circ f: X \rightarrow Z$ définie par
 $g \circ f(x) = g(f(x))$

Définition 0.35 : fonction réciproque inversible.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est inversible si $\exists g: Y \rightarrow X$ t.q. $\forall y \in Y$, $f \circ g(y) = y$ et $\forall x \in X$, $g \circ f(x) = x$. On appelle alors g la fonction réciproque de f qu'on note f^{-1} .

Théorème 0.36

Une fonction est bijective si et seulement si elle est inversible.

Exemple 0.37.

(i) Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.

On a vu à l'exemple 0.33 (i) que f est bijective, elle est donc inversible. Si $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,

alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1} \circ f(x)$

$$= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x \text{ et}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 \\ = x.$$

Remarque 0.38 :

Pour trouver f^{-1} on pose $y = f(x)$ qu'on résout pour x .
l'identité avec la quelle on termine est $f^{-1}(y) = x$.

$y = f(x)$ & injectivité ou surjectivité

- la solution nous donne le x à poser dans la surjectivité

$$y = x^2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y}$$

- la solution est unique $\Rightarrow f$ est injective

- On trouve plusieurs solutions,
 $\Rightarrow f$ n'est pas injective

$$y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x| \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

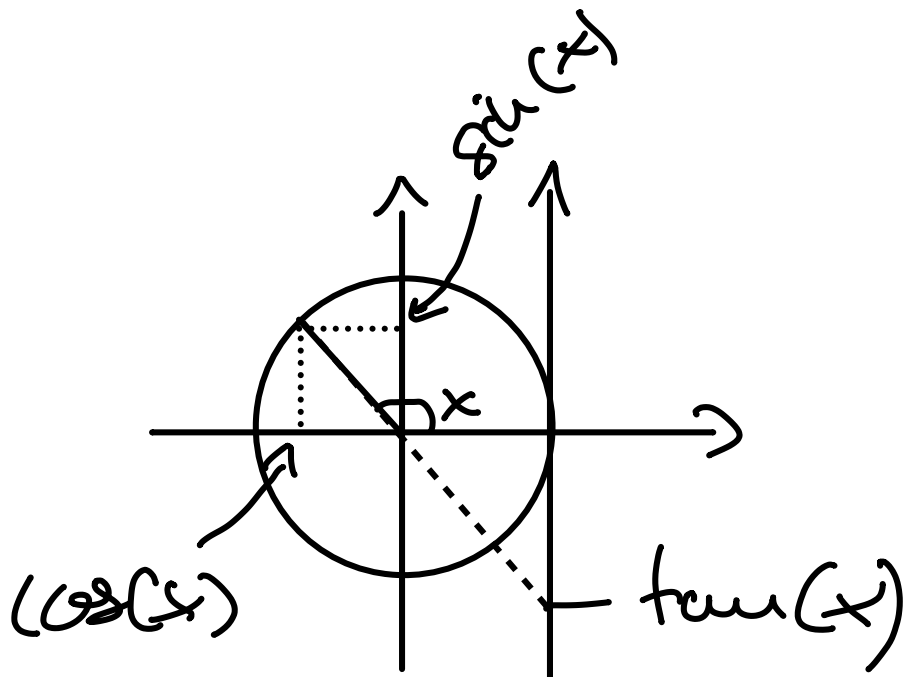
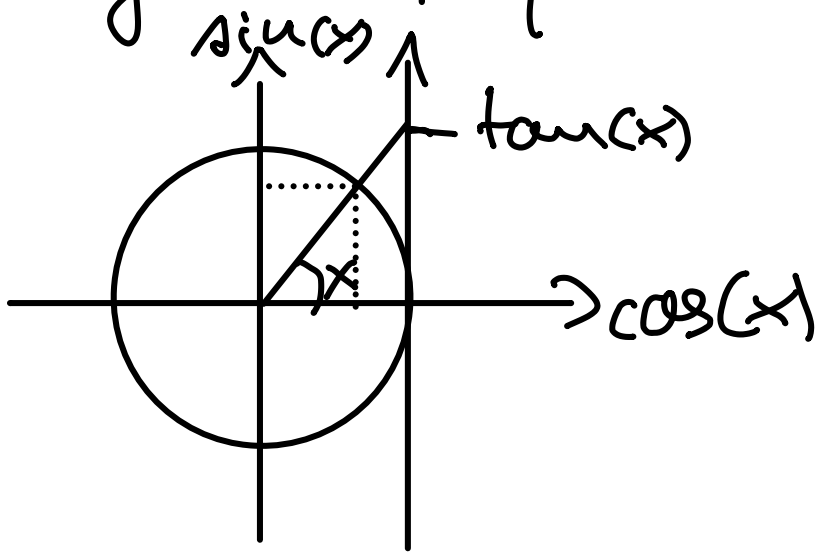
- trouver une solution demande
des hypothèses supplémentaires
sur y . $\Rightarrow$ pas surjectif

$$y = x^2 \quad \boxed{y \geq 0} \quad \xrightarrow{\Delta} \quad \sqrt{y} = |x|.$$

§0.5 Les fonctions trigonométriques l'exponentielle et le logarithme

Définition 0.49 Fonctions trigonométriques.

On peut définir $\sin(x)$, $\cos(x)$ & $\tan(x)$ à l'aide du cercle trigonométrique.



Proposition 0.51

Où a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

À montrer $A = B$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ \& } B \subseteq A.$$

$$A = \{x : P(x) \text{ est vraie}\}$$

$$B = \{x : Q(x) \text{ est vraie}\}$$

Montrer que $A \subseteq B$

$$\Leftrightarrow \text{montrer que } \forall x \in A, x \in B.$$

Soit $x \in A$ qcq. Donc $P(x)$ est vraie. *d'ailleurs*, $Q(x)$ est vraie également, donc $x \in B$.